BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2008

ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА

Г.Ю.МЕХТИЕВА, М.Н.ИМАНОВА
Бакинский Государственный Университет

Построение численных методов для решения интегральных уравнений является одним из приоритетных направлений вычисленной математики. Существуют некоторые классы методов для численного решения интегральных уравнений типа Вольтерра. Однако, все эти методы имеют некоторые преимущества и недостатки. Здесь предлагается один метод для численного решения нелинейного интегрального уравнения Вольтерра, который построен с помощью конечно-разностного метода.

Введение. Немалая часть прикладных задач сводится к решению интегральных уравнений, найти точное решение которых удается не всегда. Поэтому ученые, в основном, занимались нахождением приближенных решений интегральных уравнений. Отметим, что решением интегральных уравнений занимались известные ученые, как Ж.Лиувиля (J.Liouville, 1838), Л.Фукс (L.Fuchs, 1870), Дж Пеано (G.Peano, 1888), В.Вольтерра (V.Volterra, 1896), Э.Фредгольма (E.Fredholm, 1903), Д.Гильберт (D.Hilbert, 1912), Э.Пикар (E.Picard, 1910) и др. Во всех этих работах, в основном, использовались итерационные методы или методы, построенные на основе квадратурных формулах.

После применений компьютеров в научно-исследовательских работах, точность известных квадратурных методов была недостаточна для определения численных решений интегральных уравнений типа Вольтерра с требуемой точностью. Поэтому ученые начали использовать методы Рунге-Кутты, Адамса и двусторонние методы для определения численного решения интегральных уравнений типа Вольтерра с высокой точностью.

Здесь, к численному решению нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра предлагается использовать конечно-разностные методы. Конечно-разностные методы имеют применение во многих областях математики. Однако, он широко применяется в области дифференциальных уравнений.

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$y(x) = f(x) + \int_{x_0}^{x} K(x, s, y(s))ds\,. \tag{1}$$

Предполагаем, что непрерывная по совокупности переменных, функция $K(x,s,y)$ определена в области $G = \{x_0 \le s \le x \le X, \quad |y| \le b\}$ и там же имеет непрерывные частные производные до некоторого порядка p, включительно, а производные $p+1$ - го порядка ограничены. Непрерывная функция $f(x)$ определена на отрезке $[x_0, X]$, где имеет непрерывные производные до $p+1$, включительно.

Для определения численного решения уравнения (1), разобьем отрезок $[x_0, X]$ точками $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0,1,...,N)$ на N-равных частей (постоянная величина h является шагом разбиений).

В уравнении (1) положим $x = x_{n+i}$. Тогда имеем:

$$y(x_{n+i}) = f(x_{n+i}) + \int_{x_0}^{x_{n+i}} K(x_{n+i}, s, y(s))ds \quad (i = 0,1,2,...,k;\ n = 0,1,2,...) \qquad (2)$$

Допустим, что каким-нибудь методом определено решение $y(x)$ уравнения (1). После учета ее в (1) получаем тождество, из которого можем определить первую производную решения (1)

$$y'(x) = f'(x) + K(x, x, y(x)) + \int_{x_0}^{x} K'_x(x, s, y(s))ds.$$

Здесь, полагая, $x = x_{n+i}$, получим

$$y'(x_{n+i}) = f'(x_{n+i}) + K(x_{n+i}, x_{n+i}, y(x_{n+i})) + \int_{x_0}^{x_{n+i}} K'_x(x_{n+i}, s, y(s))ds \ . \qquad (3)$$

Теперь рассмотрим применение конечно-разностного метода к решению уравнения (1)

§1.Построение конечно-разностного метода

Как известно, конечно-разностный метод с первой производной имеет следующий вид:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i z_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i z'_{n+i} \ . \qquad (4)$$

Здесь α_i, β_i $(i = 0,1,...,k)$ некоторые действительные числа, причем $\alpha_k \neq 0$, целозначная величина k является порядком метода (4). Через z_m и z'_m обозначены приближенное значение функции $z(x)$ и ее первая производная в точке $x_m (m = 0,1,2,...)$. Для указания точности конечно-разностного метода используется понятие степени. Говорят, что целозначная величина p является степенью метода (4), если для достаточно гладкой функции $z(x)$ выполняется следующее

$$\sum_{i=0}^{k} (\alpha_i z(x+ih) - h\beta_i z'(x+ih)) = O(h^{p+1}) \ . \qquad (5)$$

Известно, что для того, чтобы метод (4) имел степень p, коэффициенты метода (4)должны удовлетворять следующим условиям:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{k} i\alpha_i = \sum_{i=0}^{k} \beta_i, \quad \sum_{i=0}^{k} \frac{i^l}{l!}\alpha_i = \sum_{i=0}^{k} \frac{i^{l-1}}{(l-1)!}\beta_i \quad (l = 2,3,...,p) \ . \qquad (6)$$

Предположим, что метод (4) имеет степень p. Для применения его к решению уравнения (1) обе стороны равенства (2) умножаем на α_i и суммируем по i $(i = 0,1,2,...,k)$. Тогда получим:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y(x_{n+i}) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f_{n+i} + \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \int_{x_0}^{x_{n+i}} K(x_{n+i}, s, y(s)) ds, \qquad (7)$$

здесь $f_m = f(x_m)$ $(m = 0,1,2,...)$.

Умножая обе стороны равенства (3) на β_i, суммируя полученные равенства по i $(i = 0,1,2,...,k)$ и затем, умножая h, имеем

$$h\sum_{i=0}^{k} \beta_i y'(x_{n+i}) = h\sum_{i=0}^{k} \beta_i f'_{n+i} + h\sum_{i=0}^{k} \beta_i K_{n+i} + h\sum_{i=0}^{k} \beta_i \int_{x_0}^{x_{n+i}} K'_x(x_{n+i}, s, y(s)) ds, \qquad (8)$$

здесь $f'_m = f'(x_m)$, $K_m = K(x_m, x_m, y(x_m))$ $(m = 0,1,2,...)$.

Учитывая достаточную гладкость функции $y(x)$ и $f(x)$ равенство (8) можем переписать в следующем виде:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f_{n+i} + h\sum_{i=0}^{k} \beta_i K_{n+i} + h\sum_{i=0}^{k} \beta_i \int_{x_0}^{x_{n+i}} K'_x(x_{n+i}, s, y(s)) ds + O(h^{p+1}). \qquad (9)$$

После отбрасывания остаточного члена получим численный метод для определения y_m - приближенного значения решения уравнения (1) в точке x_m.

Если функция $K(x,s,y(s))$ не зависит от x, т.е. $K(x,s,y(s)) = F(s,y(s))$, то метод (9) без учета остаточного члена является обычным k-шаговым методом с постоянными коэффициентами, а соотношение (1) является интегральным уравнением для следующей задачи Коши:

$$y' = f'(x) + F(x,y), \qquad y(x_0) = f(x_0).$$

Из соотношения (7) можем написать

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i (y(x_{n+i}) - f_{n+i}) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \int_{x_0}^{x_{n+i}} K(x_{n+i}, s, y(s)) ds. \qquad (10)$$

Если учесть (10) в (9), то имеем

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \int_{x_0}^{x_{n+i}} K(x_{n+i}, s, y(s)) ds = h\sum_{i=0}^{k} \beta_i K_{n+i} + h\sum_{i=0}^{k} \beta_i \int_{x_0}^{x_{n+i}} K'_x(x_{n+i}, s, y(s)) ds + O(h^{p+1}). \qquad (11)$$

Рассмотрим $K(x,s,y(s))$ - как функцию, зависящую от x. Тогда, из наложенных на функцию $K(x,s.z)$ условий, получаем, что она достаточно гладкая функция и поэтому можем написать

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i K(x_{n+i}, s, y(s)) = h\sum_{i=0}^{k} \beta_i K'_x(x_{n+i}, s, y(s)) + O(h^{p+1}). \qquad (12)$$

После интегрирования (12) имеем:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \int_{x_0}^{x_n} K(x_{n+i}, s, y(s)) ds = h\sum_{i=0}^{k} \beta_i \int_{x_0}^{x_n} K'_x(x_{n+i}, s, y(s)) ds + O(h^{p+1}). \qquad (13)$$

Из (10) можем написать следующее

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\int_{x_0}^{x_n}K(x_{n+i},s,y(s))ds=\sum_{i=0}^{k}\alpha_i(y(x_{n+i})-f_{n+i})-\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\int_{x_n}^{x_{n+i}}K(x_{n+i},s,y(s))ds. \quad (14)$$

В [1] доказано, что коэффициенты $\alpha_i,\gamma_i^{(j)}$ $(i,j=0,1,2,...,k)$ можно подобрать так, чтобы имело место:

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i y_{n+i}-\sum_{i=0}^{k}\alpha_i f_{n+i}-h\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}\gamma_i^{(j)}K(x_{n+i},x_{n+j},y_{n+i})=O(h)^{p+1}. \quad (15)$$

Используя следующую замену и (15)

$$\int_{x_n}^{x_{n+i}}K(x_{n+i},s,y(s))ds=h\sum_{j=0}^{k}d_j^{(i)}K(x_{n+i},x_{n+j},y(x_{n+j}))+O(h)^{p+1}$$

в соотношении (14) соответствующие коэффициенты можно подобрать так, чтобы имело место:

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\int_{x_0}^{x_n}K(x_{n+j},s,y(s))ds=O(h)^{p+1}. \quad (16)$$

В [1-2] построены конкретные методы, в которых коэффициенты $\alpha_i\,(i=0,1,2,...,k)$ совпадают с соответствующими коэффициентами. Отметим, что если фиксируем точку $x=x_0+nh$, то получаем, что

$$\lim_{n\to 0}\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\int_{x_0}^{x}K(x+ih,s,y(s))ds=\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\int_{x_0}^{x}K(x,s,y(s))ds=0,$$

так как $\sum_{i=0}^{k}\alpha_i=0$.

Учитывая (13) и (16) в (11) получим следующее

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i(y(x_{n+i})-f_{n+i})-h\sum_{i=0}^{k}\beta_i K_{n+i}-h\sum_{i=0}^{k}\beta_i\int_{x_n}^{x_{n+i}}K'_x(x_{n+i},s,y(s))ds=O(h)^{p+1}. \quad (17)$$

Легко можно показать, что соотношение (11) с учетом (13) можно переписать в виде:

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\int_{x_n}^{x_{n+i}}K(x_{n+i},s,y(s))ds-h\sum_{i=0}^{k}\beta_i K_{n+i}=h\sum_{i=0}^{k}\beta_i\int_{x_n}^{x_{n+i}}K'_x(x_{n+i},s,y(s))ds+O(h^{p+1}).$$

Учитывая полученное в (17), получим следующую схему:

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i y_{n+i}=\sum_{i=0}^{k}\alpha_i f_{n+i}+\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\int_{x_n}^{x_{n+i}}K(x_{n+i},s,y(s))ds+O(h^{p+1}). \quad (18)$$

Заменяя интеграл, участвующий в соотношении (18) квадратурной формулой, получим:

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i y_{n+i}=\sum_{i=0}^{k}\alpha_i f_{n+i}+h\sum_{j=0}^{k}\alpha_i\sum_{j=0}^{k}d_j^{(i)}K(x_{n+i},x_{n+j},y_{n+j}). \quad (19)$$

Найденное по указанным методам y_m - является приближенным значением решения уравнения (1) в точке x_m $(m \ge k)$. Этот метод совпадает с методом, построенными в [1]. Таким образом, применяя конечно-разностный метод к решению нелинейного интегрального уравнения Вольтерра, получаем многошаговый метод с постоянными коэффициентами, построенного в [1] для численного решения уравнения (1).

Теперь рассмотрим следующую схему, которая заключается в замене производных через разностные соотношения

$$K'_x(x_{n+i}, s, y(s)) = \frac{1}{h}\sum_{m=0}^{k} \nu_m^{(i)} K(x_{n+m}, s, y(s))$$

и заменой интеграла через квадратурную формулу в равенстве (17). В этом случае полученный метод имеет следующий вид:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f_{n+i} + h\sum_{i=0}^{k} \beta_i K_{n+i} + h\sum_{i=0}^{k} \beta_i \sum_{m=0}^{k} \nu_m^{(i)} \sum_{j=0}^{k} d_j^{(m)} K(x_{n+m}, x_{n+j}, y_{n+j})) \quad (20)$$

Отметим, что

$$\sum_{m=0}^{k} \nu_m^{(i)} = 0 \qquad (i = 0,1,2,\dots,k).$$

Следовательно, если функция $K(x,s,z)$ не зависит от x, т.е. $K(x,s,z) = F(s,z)$, то из соотношения (20) следует (9).

Отметим, что в [3] имеется список обширной литературы, посвященной исследованию решения интегральных уравнений, а в [4-11] освещены разные аспекты решения интегральных уравнений, которые учтены в данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ibrahimov V.R., Imanova M.N. On a new method of solution to Volterra integral equation. Transactions issue mathematics and mechanics series of physical technical and mathematical science, XXVII, 2007,№1, 197-204.
2. Мехтиева Г.Ю., Ибрагимов В.Р. Об одном обобщении методов квадратур. Вестник БГУ, 2008 г., №1, стр. 92 – 98.
3. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Науково Думка, 1986.
4. Zima P., Diogo T. Numerical solution of a no uniquely solvable Volterra integral equation using extrapolation methods, I.Comput.Appl.Math.140 (2002), 537-557.
5. Brunner H. The Solution of Volterra integral equations of the first kind by piecewise polynomials. – J.Inst.Math. and Appl., 1973,12,№3, p.295-302.
6. Baker C. T. H., Keech M. S. Stability regions in the numerical treatment of the Volterra integral equations – SIAM J. Numer Anal., 1978, 15, №2, p.394-417.
7. Никольский С.М. Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1979. – 256 с.
8. Malina L. A stable methods of high order for Volterra integral equations. – Appl. Math., 1975, 20, №5, p.336-344.
9. Ch.Lubich. Runge-Kutta theory for Volterra and Abel Integral equations of the second kind. Mathematics of computation volume 41, number 163, July 1983, p. 87-102.
10. Булатов М.В., Чистяков Е.В. Численное решение интегро-дифференциальных систем с вырожденной матрицей перед производной многошаговыми методами. Дифференц. уравнения, 2006, том 42, №9, с. 1248-1255.

11. Математическая энциклопедия. Т.2. Изд. Советская энциклопедия, Москва, 1979.

SONLU FƏRQLƏR ÜSULUNUN BİR TƏTBİQİ HAQQINDA

Q.Y.MEHDİYEVA, M.N.İMANOVA

XÜLASƏ

İnteqral tənliкlərin həlli üçün ədədi üsulların qurulması hesablama riyaziyyatının əsas istiqamətlərindən biridir. Volterr tipli inteqral tənliкlərin ədədi həlli üçün bir neçə üsullar sinfi məlumdur. Bu üsulların hər birinin özünəməxsus üstünlüкləri və çatışmayan cəhətləri vardır. Burada sonlu fərqlər sxeminin кöməyilə qurulan bir üsul Volterr tipli qeyri-xətti inteqral tənliкlərin ədədi həlli üçün təкlif olunur.

ON AN APPLICATION OF THE FINITE DIFFERENCE METHOD

G.Yu.MEHDIYEVA, M.N.IMANOVA

SUMMARY

The constraction of the numerical methods for solving integral equations is one of the basic directions of computational Mathematics. There are several class methods for numerical solution integral equations of Volterra type. Note that each of these methods has some advantages and disadvantages. In this paper presented a numerical method for solving nonlinear Volterra integral equations constructed by the finite difference method.